第46講　対称性

46　次の各問いに答えよ.

(1)　異なる2つの実数 α, β が

$$\alpha^3-3\alpha=\beta^3-3\beta$$

を満たしているとき, α の値の範囲を求めよ.

(2)　x, y を実数として

$$y=4x^3-3x,\quad x=4y^3-3y$$

を満たしているとき, 実数の組 (x, y) は何組存在するか.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 46 講　対称性

46　次の連立方程式 (∗) を考える.

$$(*)\quad \begin{cases} y=2x^2-1 \\ z=2y^2-1 \\ x=2z^2-1 \end{cases}$$

(1)　$(x,\ y,\ z)=(a,\ b,\ c)$ が (∗) の実数解であるとき，$|a|\leqq 1$，$|b|\leqq 1$，$|c|\leqq 1$ であることを示せ.

(2)　(∗) は全部で 8 組の相異なる実数解をもつことを示せ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 46 講　対称性

> **46** 次の各問いに答えよ．
>
> (1) 異なる 2 つの実数 α，β が
>
> $$\alpha^3-3\alpha=\beta^3-3\beta$$
>
> を満たしているとき，α の値の範囲を求めよ．
>
> (2) x，y を実数として
>
> $$y=4x^3-3x,\quad x=4y^3-3y$$
>
> を満たしているとき，実数の組 $(x,\ y)$ は何組存在するか．

【答】 (1) $-2\leqq\alpha\leqq2$　(2) 9 組

【解答】

(1) $\alpha^3-3\alpha=\beta^3-3\beta=t$ とおくと，$\alpha^3-3\alpha-t=0$ かつ $\beta^3-3\beta-t=0$ より，α と β は $x^3-3x-t=0$ の異なる 2 つの実数解となる．

ここで，$f(x)=x^3-3x$ とおくと $f'(x)=3(x-1)(x+1)$ より $f(x)$ の増減は

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

となり，$f(x)-t=0$ すなわち $f(x)=t$ が異なる実数解を 2 つ以上もつ条件は $-2\leqq\alpha\leqq2$ である．

このとき，$f(x)=2$ すなわち $(x+1)^2(x-2)=0$ であることや $f(x)=-2$ すなわち $(x-1)^2(x+2)=0$ となることと，$y=f(x)$ と $y=t$ のグラフの共有点の x 座標を考えると，求める α の値の範囲は $\boldsymbol{-2\leqq t\leqq2}$ である．

(2) 与式の辺々の差をとると $y-x=4(x^3-y^3)-3(x-y)$ より

$$2(x-y)\{2(x^2+xy+y^2)-1\}=0$$

また与式の辺々の和をとると $y+x=4(x^3+y^3)-3(x+y)$ より

$$4(x+y)\{(x^2-xy+y^2)-1\}=0$$

よって以下の 4 つの場合を考えればよい．

(Ⅰ) $x-y=0$ かつ $x+y=0$ のとき，$x=y=0$ である．

(Ⅱ) $x-y=0$ かつ $x^2-xy+y^2=1$ のとき，$y=x$ を $x^2-xy+y^2=1$ に代入して $x=\pm1$

よって $x=y=\pm1$ である．

(Ⅲ) $x^2+xy+y^2=\dfrac{1}{2}$ かつ $x+y=0$ のとき，$y=-x$ を $x^2+xy+y^2=\dfrac{1}{2}$ に代入して

$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　よって $(x,\ y)=\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$（複号同順）

(Ⅳ) $x^2+xy+y^2=\dfrac{1}{2}$ かつ $x^2-xy+y^2=1$ のとき，辺々の差をとると $2xy=-\dfrac{1}{2}$ ゆえに

$xy=-\dfrac{1}{4}$　これと $x^2-xy+y^2=1$ すなわち $(x+y)^2=3xy+1$ より $x+y=\pm\dfrac{1}{2}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって x と y は $\alpha^2 \pm \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4} = 0$ の2解となるので

$$(x,\ y) = \left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4},\ \frac{-1 \mp \sqrt{5}}{4}\right),\ \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{4},\ \frac{1 \mp \sqrt{5}}{4}\right)\ （複号同順）$$

以上より，求める $(x,\ y)$ の組の個数は **9**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第46講　対称性

46　次の連立方程式（＊）を考える.

$$(*)\quad \begin{cases} y=2x^2-1 \\ z=2y^2-1 \\ x=2z^2-1 \end{cases}$$

(1)　$(x,\ y,\ z)=(a,\ b,\ c)$ が（＊）の実数解であるとき，$|a|\leqq 1$，$|b|\leqq 1$，$|c|\leqq 1$ であることを示せ.

(2)　（＊）は全部で8組の相異なる実数解をもつことを示せ.

【答】　略

【解答】

(1)　$|a|>1$ とすると

$$\begin{aligned} |b|-|a| &= |2a^2-1|-|a| \\ &> 2|a|^2-|a|-1 \\ &= (2|a|+1)(|a|-1)>0 \qquad \therefore\quad |b|>|a| \end{aligned}$$

同様に $|c|>|b|$，$|a|>|c|$　ゆえに $|a|>|c|>|b|>|a|$ となり矛盾.

よって　$|a|\leqq 1$

このとき

$$0\leqq 2a^2\leqq 2 \qquad -1\leqq 2a^2-1\leqq 1$$

より　$|b|\leqq 1$

同様に　$|c|\leqq 1$

(2)　$|a|\leqq 1$ より $a=\cos\theta$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とおける．よって

$$b=2\cos^2\theta-1=\cos 2\theta,\ c=2\cos^2 2\theta-1=\cos 4\theta$$

となり

$$a=2\cos^2 4\theta-1=\cos 8\theta$$

より

$$\begin{aligned} &\cos 8\theta=\cos\theta \\ &\cos 8\theta-\cos\theta=0 \\ &-2\sin\frac{9}{2}\theta\sin\frac{7}{2}\theta=0 \end{aligned}$$

ここで $0\leqq\frac{9}{2}\theta\leqq\frac{9}{2}\pi$，$0\leqq\frac{7}{2}\theta\leqq\frac{7}{2}\pi$ より

$$\begin{cases} \frac{9}{2}\theta=0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi \\ \frac{7}{2}\theta=0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi \end{cases}$$

$$\therefore\quad \theta=0,\ \frac{2}{9}\pi,\ \frac{4}{9}\pi,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{8}{9}\pi,\ \frac{2}{7}\pi,\ \frac{4}{7}\pi,\ \frac{6}{7}\pi$$

この角 θ に対して $a=\cos\theta$ は異なる値をとるので（＊）は全部で8組の相異なる実数解をもつ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。